لوگارثم کی حقیقت ومعرفت-ایک تحقیقی مطالعہ

(۱) علم ریاضی جو مدارج علوم میں مابعد الطبیعیات اور ماقبل الالٰہیات کا درجہ رکھتا ہے۔حکمت و فلسفہ کا وہ حصہ ہے جس کے بغیر انسانی حیات کا ہر گوشہ تاریک اور ہر پہلو ناتمام رہتا ہے۔مرکز عالم سے لے کر فلک اعلیٰ کی سطح محدب تک جملہ کاروبارِ عالم خواہ وہ فلک پیمائی ہو یا تسخیر ماہ و نجوم، ایجادات عنصریہ ہو یا نتائج فکریہ، سبھی اس کے اسیر ہیں۔اس کی حکمرانی ایک فقیر کی جھوپڑی سے لے کر شاہی محل تک محیط ہے،سوئی کے ناکہ سے لے کر راکٹ کی پرواز تک ہر شے میں اسی کا ضابطہ کارفرما ہے۔الغرض جملہ ایجادات واکتشافات اس کے محتاج و دست نگر ہیں۔اس کی نوع بہ نوع خوبیوں سے متاثر ہو کر دانشوروں کا ایک طبقہ اسے اپنا دل دے بیٹھا اور اس کے زلف پرخم میں صدیوں اپنے کو الجھائے رکھا۔حسن کی دلکشی کسی ایک زاویہ میں محصور نہیں ہوئی،کوئی اس کا جلوہ محبوب کے چشم مخمور میں محسوس کرتا ہے، کسی کو اس کی تجلی لبہائے شگفتہ میں معلوم ہوتی ہے کوئی اس کا بانکپن گیسوئے تابدار میں محسوس کرتا ہے تو کسی کو اس کا چھبن ابروئے خمدار میں نظر آتا ہے جس کے نتیجہ میں کوئی دندان آبدار اور کوئی گیسوئے مشک بار میں فدا ہو جاتا ہے،کوئی رشاقت قد اور کوئی صباحت خد میں اپنے کو گم کر دیتا ہے۔

غمزے سے عشوے سے لگا لیتے ہیں
وہ جسے چاہتے ہیں اپنا بنا لیتے ہیں

کچھ اس طرح کا حال علم ریاضی کا بھی ہے۔اس کے دامن میں سیکڑوں گل بوٹے اپنی الگ الگ خوبیوں کے ساتھ اہل بصیرت کو دعوت نظر وفکر دیتے ہیں۔

حساب وموسیقی، ہیئت وہندسہ، جبر ومقابلہ،توقیت ومساحت، مناظر ومرایا، ابعاد واجرام، مثلث

کروی و سطحی، فصل مخروط، فن اکر، خبر الاثقال وغیرہ، اپنی اپنی نزاکتوں سے دل عاشقاں کو پامال کر رہے ہیں۔ اسی طرح دنیا میں ایک سے ایک ریاضی کے مختلف فنون کے رمز آشنا اور دانائے راز جنم لیتے ہیں۔

(۲) سولھویں صدی میں ایسا ہی ایک فکر وفن کا دلدادہ بکرایاں چراتے چراتے آفاقِ عالم پر چھا گیا اور دنیا اسے ''سرائزک نیوٹن'' کے نام سے یاد کرنے لگی۔ نیوٹن نے جہاں کہیں ریاضیات میں بہت سے کلیات کا اضافہ کیا وہیں انھوں نے لوگارثم کو دریافت کر کے فن حساب میں چار چاند لگایا ہے، باب حساب میں ضرب وتقسیم کے ذریعہ حل پذیر وہ عملیات جو بڑے پیمانے ہی سے حل کیا جا سکتا تھا، ان عملیات کے لیے انھوں نے ایک چھوٹا سا پیمانہ دریافت کر لیا، اسی پیمانے کو ''لوگارثم'' کہتے ہیں جسے رومن زبان میں ''لوگارتھم'' کا نام دیا گیا ہے۔

(۳) لوگارثم کی حقیقت معلوم کرنے کے لیے بطور تمہید اولا چند باتوں کو دھیان میں رکھنا ضروری ہے:

ا۔ کسی عدد کو خود اسی عدد میں ضرب دیتے چلے جائیں تو ہر ضرب سے ایک نیا حاصل ضرب پیدا ہوتا چلا جائے گا۔ پہلی بار کی ضرب سے اس کا مربع (مال) دوسری بار کی ضرب سے اس کا مکعب اسی طرح تیسری اور چوتھی بار کی ضرب سے الگ الگ حاصل ضرب مثلاً بالترتیب مال مال، مال مکعب آتے جائیں گے:

مثلاً ۳×۳ =۹۔ پھر ۳×۳×۳ =۲۷ یا پھر ۳×۳×۳×۳ =۸۱ وغیرہ

پہلی صورت میں ۹ رتین کی دوسری قوت۔ دوسری صورت ۲۷ رتین کی تیسری قوت اور تیسری صورت میں ۸۱ رتین کی چوتھی قوت کہلاتی ہے۔ یہ سب تین کے صعودی قوتیں ہیں۔

رہا خود تین تو چونکہ ہر عدد اپنے اندر فی نفسہ ایک کی قوت رکھتا ہے اس لیے تین بذات خود اپنے اندر پہلی قوت رکھتا ہے۔ اسی طرح ہم اگر چار میں یہی عمل جاری کریں تو یہ صورت ہو جائے گی:

۴×۴ =۱۶ ۴×۴×۴ =۶۴ ۴×۴×۴×۴ =۲۵۶

یعنی چار کی دوسری قوت ۱۶، تیسری قوت ۶۴ اور چوتھی قوت ۲۵۶ ہے یہاں پر یہ قوتیں صعودی ہیں جسے مثبت قوت کہتے ہیں لیکن اگر ہم تین والے سلسلے میں بجائے تین تین گنا بڑھنے کے اسی تناسب سے گھٹاتے چلے جائیں تو اس کی صورت یوں ہوگی:

۸۱ کا مثلث ۲۷، ۲۷ کا ثلث ۹، ۹ کا ثلث ۳

اور اگر چار والے سلسلے میں یہی عمل کریں تو نوعیت یہ ہو جائے گی:

۲۵۶ کا ربع ۶۴، ۶۴ کا ربع ۱۶، اور ۱۶ کا ربع ۴ ہو جائے گا۔

پہلے مذکور ہو چکا ہے کہ ہر عدد اپنی ذاتی قیمت کے اظہار کے وقت پہلی قوت رکھتا ہے اب اگر ہم اس تین اور چار کو اسی تناسب سے ایک درجہ کم کر کے تین کا ثلث ایک اور چار کا ربع ایک تک پہنچا دیں تو دونوں عددوں میں قوت صفر ہو جائے گی۔

مذکورہ بالا مضمون سے یہ معلوم ہوا کہ کسی بھی عدد کو قوت کے ذریعہ بڑھاتے بڑھاتے کسی بھی عدد تک پہنچا سکتے ہیں اور قوت کے ذریعہ گھٹاتے گھٹاتے صفر تک اتار سکتے ہیں اور صفر کے درجہ میں ہر عدد خواہ کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو، ایک بن جاتا ہے۔

درجہ صفر میں ۸، ۹، ۵، ۷، سب ہی ایک کے برابر ہو جاتے ہیں۔ لیکن ہم اگر اسی تین اور چار جو صفر قوت میں ایک کے برابر ہو گئے ہیں اسے پھر اسی تناسب سے کم کرتے چلے جائیں تو اب تین والے سلسلے میں $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۱}{۲۷}$، $\frac{۱}{۸۱}$ اور چار والے سلسلے میں $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۱۶}$، $\frac{۱}{۶۴}$، $\frac{۱}{۲۵۶}$ ہو جائے گا۔ اس سلسلے میں تین اور چار کی یہ قوت نزولی ہے سے منفی قوت کہتے ہیں۔

الغرض کسی بھی عدد کو اسی عدد سے برابر ضرب دیتے چلے جائیں تو قوت صعودی حاصل ہو جائے گی اور اگر اسی تناسب سے گھٹاتے جائیں تو قوت نزولی ہو جائے گی اور اگر اسی تناسب سے گھٹاتے جائیں تو قوت نزولی ہو جائے گی، ان دونوں قوت کے درمیان صفر کا درجہ جہاں تمام اعداد ایک کے برابر ہو جاتے ہیں وہ صعودی اور نزولی کے درمیان مثل برزخ ہے۔ ماسبق سے یہ نتیجہ بآسانی حاصل ہوتا ہے کہ دنیا کے تمام اعداد اپنے صفر قوت میں ایک کے برابر ہو جاتے ہیں اور پہلی

قوت میں ہر عدد اپنی ذاتی قیمت کا اظہار کرتا ہے لیکن اپنی صعودی اور نزولی قوتوں میں اس کی قیمت (ویلیو) الگ الگ ہو جاتی ہے۔

۲۔ الجبر والمقابلہ میں کبھی اعداد اور کبھی اس کے بدلے غیر معلوم القیمت حروف ہجا استعمال کیے جاتے ہیں، اعداد کی صورت میں ان کی صعودی اور نزولی قوت عدد ہی کی شکل میں ظاہر کی جاتی ہے لیکن حروف ہجا کی صورت میں اس کا اظہار ممکن نہیں مثلاً ی × ی یا ی × ی × ی یا ی × ی × ی × ی وغیرہ ان مثالوں میں پہلی صورت کی دوسری قوت یعنی مربع اور مال کی ہے۔ دوسری صورت اسی ی کی تیسری قوت مکعب کی ہے۔ تیسری صورت اسی ی کی چوتھی قوت مال المال کی ہے۔ لیکن جس طرح ہم ۳×۳ کے حاصل ضرب کو ۹ سے تعبیر کر سکتے ہیں اسی طرح ی × ی کے حاصل ضرب کو کسی عدد سے تعبیر نہیں کر سکتے، اس لیے ریاضی دانوں نے صعودی قوت کے اظہار کے لیے ''مثبت قوت نما'' اور نزولی قوت کے اظہار کے لیے ''منفی قوت نما'' اور صفر قوت کے اظہار کے لیے ''صفر'' استعمال کیا ہے۔

رہی پہلی قوت تو چونکہ ہر عدد فی نفسہ اپنے اندر پہلی قوت رکھتا ہے اس لیے اس صورت کے لیے کسی ''قوت نما'' کے اظہار کی ضرورت نہیں بلکہ اسے طبعی حال پر چھوڑ دیتے ہیں اس پر کوئی قوت نما نہیں لگاتے ہیں لہٰذا ی^{۲} کا مطلب ی کا مربع ہے اور ی^{۳} کا مطلب ی کا مکعب ہے، ی^{۴} کا مطلب ی کا مال المال ہے۔ الحاصل یہ ہے کہ ریاضی دانوں نے حروف ہجا کی مختلف قوتوں کو ظاہر کرنے کے لیے اس کے اوپر ایک نشان اور علامت متعین کر دی جو ان حروف ہجا کی قیمت پر دال ہو اور یہ طے ہو گیا ہے کہ جس مقدار کے اوپر ۲ کا قوت نما ہو گا یہ مقدار کی دوسری قوت اور جس مقدار پر ۳ کا قوت نما ہو گا وہ تیسری قوت کی نشان دہی کرے گا۔

۳۔ یہ علامت جس طرح حروف ہجا میں مختلف قوتوں کا اظہار کرتی ہے اسی طرح اعداد میں بھی مختلف قوتوں کا اظہار کرتی ہے مثلاً ۳^{۲} کا مطلب ۳×۳ = ۹، ۳^{۳} کا مطلب ۳×۳×۳ = ۲۷ وغیرہ وغیرہ۔

۴۔ کسی عدد پر مثبت قوت نما کا استعمال سادے ڈھنگ سے کیا جاتا ہے یعنی قوت نما کے مثبت

کی علامت نہیں لگائی جاتی ہے لیکن منفی قوت نما کے استعمال کے وقت اس کے پہلو میں منفی کی علامت لگادی جاتی ہے لہٰذا $۳^{۲}$ کا مطلب $۳\times۳=۹$ ہے اور $۳^{-۲}$ کا مطلب $\frac{۱}{۳\times۳}=\frac{۱}{۹}$ ہے۔ اس لیے یہ بات واضح ہے کہ منفی قوت نما سے ہمیشہ کسی مخصوص کسر کی طرف اشارہ ہوتا ہے۔ یہاں عدد صحیح کا سوال ہی نہیں اور مثبت نما سے خواہ وہ عدد صحیح ہو یا کسر مرکب یا کسر مجرد ہر حال میں اس سے کسی خاص عدد صحیح کی طرف اشارہ ہوتا ہے۔ لہٰذا ۲ $۱۶^{\frac{۱}{۲}}$ سے ۱۰۲۴ کی طرف اشارہ ہے اور $۱۶^{\frac{۱}{۲}}$ سے ۴ر کی طرف اشارہ ہے۔

۵۔ ماسبق مضمون سے واضح ہوا کہ ہم ۳ کے عدد کو مختلف قوت نما کے ذریعے الگ الگ دوسرے عددوں کے مساوی کرسکتے ہیں مثلاً $۳^{۲}=۹$، $۳^{۳}=۲۷$، $۳^{۴}=۸۱$۔ $۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$، $۳^{-۲}=\frac{۱}{۹}$
$۳^{-۳}=\frac{۱}{۲۷}$، $۳^{-۴}=\frac{۱}{۸۱}$

اگر ہم تین کے اوپر بجائے ۲ اور ۳ کے اس کے مابین واقع ہونے والی کسر مرکب کو قوت نما بنالیں تو ۳، ۹ اور ۲۷ کے درمیان واقع ہونے والے عددوں میں سے کسی عدد کے برابر ہوجائے گا جس طرح ہم مختلف قوت نما کے ذریعہ ۳ کے ہندسہ کو الگ الگ عددوں کے مساوی کرسکتے ہیں، اسی طرح ہم ۱۰ کے عدد کو بھی قوت نما کے ذریعہ متعدد عددوں کے مساوی کرسکتے ہیں۔ بلکہ اگر ہم ۱۰ کے اوپر قوت نما کو اس طرح عام کرتے چلے جائیں کہ قوت نما عدد صحیح بھی ہوسکتا ہے اور کسر مجرد بھی اور کسر مرکب بھی تو اس تعمیم کی وجہ سے ہم ۱۰ کے ہندسہ کو جس عدد کے مساوی بنانا چاہیں گے ہوجائے گا۔

۶۔ اگر کسی معین عدد پر الگ الگ قوت نما لگا کر اسے چند دوسرے عددوں کے مساوی کردیں تو اس صورت میں معین عدد کے قوت نما کو اگر جوڑ دیا جائے تو اس کے مساوی عددوں میں ضرب ہوجاتا ہے مثلاً $۱۰^{۲}$ اور $۱۰^{۳}$ یہاں ۱۰ کے ہندسہ پر پہلے ۲ کی قوت نما اور پھر ۳ کی قوت نما لگائی گئی ہے۔ اگر ہم ان قوت نما کو جوڑ دیں $(۲+۳=۵)$ اور پھر اس حاصل جمع کو ۱۰ کے ہندسہ پر لگادیں تو $۱۰^{۵}$ کا مطلب یہ ہوگا کہ $۱۰^{۲}$ کے مساوی عدد یعنی $۱۰\times۱۰=۱۰۰$ کو $۱۰^{۳}$ کے مساوی عدد یعنی $۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰۰۰$ سے ضرب کرچکے ہیں اس لیے کہ $۱۰\times۱۰\times۱۰$ سے ضرب دینے کی صورت یہی ہے جسے مسلسل لکھ سکتے ہیں۔

$10^5 = 100000$، یہ بعینہٖ ۱۰۰×۱۰۰۰ کا حاصل ضرب ہے جس کا صریح نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مخصوص عدد پر لگے ہوئے مختلف قوت نما کو جوڑ دیا جائے تو خود بخود مساوی عددوں میں ضرب کا عمل ہو جاتا ہے۔ اسی طرح کسی دو مخصوص عدد کے اوپر لگے ہوئے قوت نما کو ایک دوسرے سے تفریق کر دیں تو مساوی عددوں میں تقسیم کا عمل خود بخود ہو جاتا ہے مثلاً 10^3 کو 10^2 پر تقسیم کرنا چاہیں تو قوت نما ۳ سے قوت نما ۲ تفریق کر دیں گے گو باقی ایک رہ جائے گا تو یہ اس بات کو واضح کرے گا کہ $10^3 = 1000$ کو $10^2 = 100$ پر تقسیم کرنے پر خارج قسمت ۱۰ ہوگا۔ یہ اس لیے کہ $10^3 \div 10^2 = \frac{10\times10\times10}{10\times10} = 10$ یا $10^3 \div 10^2 = (1000\div100) = \frac{1000}{100} = 10$۔ حسب بیان مقامہ نمبر ۵، ہم ۱۰ کے ہندسہ کو مختلف قوت نما کے ذریعہ تمام عددوں کے مساوی کر سکتے ہیں۔ حسب بیان مقدمہ نمبر ۶، ہم اگر کسی بھی دو عددوں میں ضرب کرنا چاہیں تو ۱۰ پر لگے قوت نماؤں کو جوڑ دیں گے جن قوت نما کے واسطے ۱۰ کا ہندسہ مفروضہ عددوں کے برابر ہوا ہے۔ اسی طرح ہم اگر کسی دو عددوں کے مابین تقسیم کا عمل کرنا چاہیں گے تو ہم دس پر لگے ان قوت نماؤں میں تفریق کا عمل کر لیں گے جن قوت نماؤں کے ذریعہ ۱۰ کا ہندسہ مفروضہ عددوں کے مساوی ہو گیا ہے، اس لیے کہ اگر ۱۰ کے ہندسہ کے ان تمام قوت نماؤں کی جدول تیار کر لیں جن کے واسطے سے ۱۰ کا ہندسہ کسی بھی عدد کے مساوی ہو جاتا ہے تو ہمارے لیے ضرب و تقسیم کا مسئلہ بہت ہی سہل ہو جاتا ہے۔ ''لاگرتھم ٹیبل'' (جدول لوگارثم) ۱۰ عدد کے ان تمام قوت نماؤں کو جو دس کو ایک سے لے کر ایک لاکھ آٹھ ہزار کے برابر کرتے ہیں درج کیا گیا ہے، ان ہی قوت نماؤں کا نام ''لوگارثم'' ہے۔

ان تمہیدات کے بعد اب لوگارثم کی حقیقت اس طرح واضح کی جاتی ہے کہ دس کے اوپر لگا ہوا وہ قوت نما جو دس کو کسی مخصوص عدد کے برابر کر دیتا ہے وہ قوت نما دس کے لیے قوت اور مخصوص عدد کے لیے لوگارثم ہے مثلاً $10^2 = 100$، اس مثال میں دس کے اوپر ۲ قوت نما جو دس کو ۱۰۰ کے برابر کرتا ہے دس کی قوت ہے اور ۱۰۰ کا لوگارثم ہے۔ اسے ریاضی کی زبان میں اس طرح بولیں گے کہ ۱۰ کے قاعدہ پر ۱۰۰ کا لوگارثم ۲ ہے۔ یوں تو عددوں کے لوگارثم بنانے کے لیے کسی بھی عدد کو قاعدہ مانا جا سکتا ہے مثلاً

ہم چار کے قاعدہ پر ۳۲ کا لوگارثم نکالنا چاہتے ہیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ اگر چار کو $\frac{۵}{۲}$ تک صاعد کرتے ہیں تو ۳۲ حاصل ہوجاتا ہے اس لیے چار کے قاعدہ پر ۳۲ کا لوگارثم $\frac{۵}{۲}$ یعنی ۲٫۵۰۰۰۰۰ ہے اور اگر اس چار کے قاعدہ پر ہم ۸ کا لوگارثم چاہیں تو چونکہ ۴ کو $\frac{۳}{۲}$ تک صاعد کرنے سے ۸ کے برابر ہوجاتا ہے اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ چار کے قاعدہ پر ۸ کا لوگارثم $\frac{۳}{۲}$ = ۱٫۵۰۰۰۰۰ ہے۔ اسی طرح کسی بھی دوسرے عدد کو قاعدہ مان کر لوگارثم نکال سکتے ہیں لیکن بعض ریاضی دان نے لوگارثم کے لیے ۱۰ ہی کو قاعدہ تسلیم کرلیا ہے۔ **ولا مشاحۃ فی الاصطلاح۔**

ضابطہ یہ ہے کہ قاعدہ اور عدد خاص دونوں کو اتنی قوت تک صاعد کیا جائے کہ دونوں قیمت میں مساوی ہوجائیں تو قاعدہ کی قوت صعودی کو شمار کنندہ اور عدد خاص کی قوت صعودی کو نسب نما قرار دینے سے جو عدد حاصل ہو وہ عدد مخصوص کا لوگارثم ہے، مثلاً مذکورہ بالا مثال میں ہمیں ۴ کو قاعدہ مان کر ۳۲ کا لوگارثم معلوم کرنا ہے۔ ہم نے یہ دیکھا کہ (۴×۴×۴×۴×۴) = (۳۲×۳۲) یعنی بلفظ دیگر $\frac{۵}{۴}$ = $\frac{۲}{۳۲}$ اس لیے $\frac{۵}{۲}$ = ۳۲ لہٰذا ۴ کے قاعدہ پر ۳۲ کا لوگارثم $\frac{۵}{۲}$ ہے ہم اس قاعدہ پر ۸ کا لوگارثم چاہتے ہیں اس لیے ہم نے یہ سلسلہ قائم کیا (۴×۴×۴) = (۸×۸) یعنی $\frac{۳}{۴}$ = $\frac{۲}{۸}$ اس لیے $\frac{۳}{۲}$ = ۸ لہٰذا ۴ کے قاعدہ پر ۸ کا لوگارثم $\frac{۳}{۲}$ ہے۔ اس کی مزید تشریح یہ ہے کہ مذکورہ بالا مثال میں ۴ کی پانچویں قوت ۱۰۲۴ ہے اور اسی طرح ۳۲ کی دوسری قوت ۱۰۲۴ ہے یعنی دونوں عدد اِن قوتوں میں ایک دوسرے کے مساوی ہیں لیکن سابق بیان کے مطابق مجھے چار کو بذریعہ قوت نما ۳۲ کے برابر معلوم کرنا ہے اور یہاں $\frac{۵}{۴}$ = $\frac{۲}{۳۲}$ ہے اس لیے اگر ہم ۳۲ کے ذریعہ قوت نما اور ۴ کے قوت نما دونوں کو ۳۲ کی قوت نما یعنی ۲ سے تقسیم کردیں جب بھی دونوں مساوی ہی رہیں گے اور صورت یہ ہوجائے گی $\frac{۵}{۲}$ = ۳۲۔

اس طرح ہم نے یہ معلوم کرلیا کہ ۴ کا عدد اپنی قوت صعودی کی ۲٫۵۰۰۰۰۰ میں ۳۲ کے برابر ہے لہٰذا ۳۲ کا لوگارثم ۲٫۵۰۰۰۰۰ ہے۔ ۳ کا لوگارثم ۱۰ کی وہ مخصوص قوت نما ہے اور اسی طرح ۲ کا لوگارثم بھی ۱۰ کی وہ عدد مخصوص قوت نما ہے جس کے ذریعہ ۱۰، ۳، اور ۲ کے مساوی ہوجاتا ہے۔

اور ماسبق میں یہ بتایا گیا ہے کہ اگر ایک ہی عدد کے متعدد قوت نماؤں کو باہم جوڑ دیا جائے تو قوت نما والے عدد کے مساوی اعداد میں ضرب کا عمل ہوجاتا ہے اس لیے اگر ۳ اور ۲ کا لوگارثم جمع کر

دیں تو لامحالہ قوت نما والے ۱۰ کے مساوی اعداد میں ضرب ہو جائے گا اور چونکہ قوت نما والا ۱۰ یہاں ۳ اور ۲ کے برابر ہے جس کا مطلب یہ ہوگا کہ ۳ اور ۲ میں ضرب کا عمل ہوگا اور چونکہ ۳×۲=۶ ہوتا ہے اس لیے ۳ اور ۲ کے لوگارثم کا مجموعہ ۶، کا لوگارثم ہو جائے گا، ۱۰×۲=۲۰، اس لیے ۱۰ کا اور ۲ کا لوگ کا حاصل جمع ۱۰ کا لوگ ہے۔

اس بات سے ظاہر ہے کہ ۱۰ یا اس کے مال ومکعب وغیرہ کا لوگارثم سہل الحصول ہے اسی طرح ۵×۲=۱۰ ہوتا ہے اس لیے اگر ۱۰ کے لوگارثم سے ۲ کا لوگارثم تفریق کر دیں تو لامحالہ ۵ کا لوگارثم حاصل ہو جائے گا۔ ان دونوں ضابطوں سے یہ واضح ہے، اگر چند عددوں کا لوگارثم معلوم ہو جائے تو ان کے ذریعہ بآسانی بہت سے دوسرے عددوں کا لوگارثم بھی نکل سکتا ہے۔ دس یا اس کے مال، کعب، مال المال، مال المکعب، کعب الکعب وغیرہ کا لوگارثم خاص عدد صحیح ہی ہوتا ہے لیکن ۱۰ سے بڑا وہ عدد جو ۱۰ کا مال، مکعب وغیرہ نہیں ہے اس کے لوگارثم میں عدد صحیح اور کسر دونوں شامل ہوتے یعنی اس کا لوگارثم کسر مرکب ہوتا اور دس سے کم والے عدد جو ایک سے بڑا ہو، اس کا لوگارثم صرف کسر مجرد ہوگا۔

رہا خود ایک کا لوگارثم تو ماسبق میں یہ بتایا گیا ہے کہ ہر عدد صفر درجہ میں ایک کے برابر ہو جاتا ہے اس لیے کسی عدد کو بھی مانیں ہر حال میں ایک کا لوگارثم صفر ہی ہوگا۔ حساب کا ہر وہ عمل جس میں ضرب وتقسیم کی کسی بھی طور پر حاجت ہو وہاں لوگارثم کے ذریعہ مختصر انداز میں عمل کیا جا سکتا ہے بالخصوص توقیت وہیئت، اربعہ متناسبہ اور دوسرے جغرافیائی امور میں یہ بے حد مفید ہے۔

لوگارثم، عدد مخصوص اور قاعدہ، ان تینوں میں ایک خاص قسم کا تعلق ہے، اس لیے ان میں سے دو چیزیں اکثر معلوم ہوں تو تیسری چیز ہم معلوم کر سکتے ہیں:

(۱) لوگارثم اور قاعدہ معلوم ہو تو عدد خاص کو اس طرح سے معلوم کر سکتے ہیں کہ قاعدہ کو لوگارثم کے شمار کنندہ تک صاعد کر کے اسے لوگارثم کے نسب نما تک جذر لیں یا قاعدہ کو لوگارثم تک صاعد کریں۔

(۲) لوگارثم اور عدد خاص معلوم ہو تو قاعدہ اس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ عدد خاص کو لوگارثم کے نسب نما تک صاعد کر کے اسے لوگارثم کے شمار کنندہ تک جذر لیں یا عدد کا خاص کا لوگارثم تک جذر لیں۔

(۳) قاعدہ اور عدد خاص معلوم ہوتو لوگارثم اس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ عدد خاص اور قاعدہ کو یعنی دونوں کو اتنے مرتبہ صاعد کریں کہ دونوں کے صعودی عدد برابر ہو جائیں اور پھر عدد خاص اور قاعدہ یعنی دونوں کی قوت صعودی کو عدد خاص کی قوت سے تقسیم کر دیں۔ قاعدہ کی حاصل شدہ قوت لوگارثم ہے۔

لوگارثم کا طریقہ استعمال اور جدول سے طریقہ استخراج دونوں لوگارثم کی کتاب کے مقدمہ میں مذکور ہے۔ لوگارثم کی پوری تفصیل جداولہائے ریاضیہ چیمبرس کے اندر مذکور ہے مگر افسوس کہ یہ مقدمہ بزبان انگلش ہے اور ساتھ ہی اس زمانے میں اس سے بہت سے دفعات حذف کر دیئے گئے ہیں۔

امام احمد رضا قادری محدث بریلوی علیہ الرحمۃ والرضوان نے کسی سے اس انگریزی مقدمہ کا ترجمہ اردو میں کرایا تھا اس پر جا بجا حاشیہ بھی تحریر فرمایا۔ یہ ترجمہ بنام "رسالہ در علم لوگارثم" ادارۂ تحقیقات امام احمد رضا پاکستان کے توسط سے چھپ چکا ہے مگر اس کا بھی حال یہ ہے کہ دفعہ ۱۹/۱۱ اور ۲۰ جو چیمبرس میں درج ہے اس میں درج نہیں اور چمبرس کا بھی یہ حال ہے کہ اس میں دفعہ ۲۹ تا ۳۲/ اسی طرح ۳۷/تا ۶۴/ جو اس رسالہ میں درج ہے چمبرس میں مذکور نہیں ہے۔

امام احمد رضا قادری محدث بریلوی علیہ الرحمہ والرضوان نے فتویٰ رضویہ میں بہت سے مقام میں اس لوگارثم کا استعمال فرمایا ہے جسے فتاویٰ رضویہ کے اندر جا بجا دیکھا جا سکتا ہے۔

○ ○ ○